ΘΕΩΡΗΜΑ (Κρ. Lebesgue για Jordan μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^n$)

Έστω $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-Μετρήσιμο (δηλ. φραγμένο και ∂B έχει μηδενικό μέτρο) και $f: B \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ f συνεχής σχεδόν παντού

Πόρισμα: Έστω $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-Μετρήσιμο (συμπαγές) και $f: B \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Longrightarrow$ f ολοκληρώσιμη

Απόδειξη

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό με $B \subseteq A$ και $f_B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

και $f_B(x) = \begin{cases} f'(x) & , x \in B \\ 0 & , x \notin B \end{cases}$

αλλά, f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ $f_B|A$ ολοκληρώσιμη

και από Κρ. Lebesgue (κλ. ορθογωνίων)

η $f_B|A$ συνεχής σχεδόν παντού

$D_1 = \{x \in B : f \text{ ασυνεχής στο } x\} \subset \{x \in A : f_B|A \text{ ασυνεχ. στο } x\}$

$= D_2 \subset \{x \in B : f \text{ ασυνεχής στο } x\} \cup \partial B = D_1 \cup \partial B$

Άρα, αν το D_2 έχει μηδεν. μέτρο $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ D_1 έχει μηδεν. μέτρο $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $D_1 \cup \partial B$ έχει μηδεν. μέτρο

Άρα, πράγματι το D_2 έχει μηδενικό μέτρο.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ)

Έστω $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-Μετρήσιμο $f, g: B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες

α) $f+g$ ολοκληρ. με $\int_B (f+g) = \int_B f + \int_B g$

β) $a \cdot f$ ολοκληρ. με $\int_B (a f) = a \cdot \int_B f$

γ) $f \leq g \Rightarrow \int_B f \leq \int_B g$.

δ) $|f|$ ολοκληρώσιμη με $|\int_B f| \leq \int_B |f|$
ε) $f \cdot g$ ολοκληρώσιμη

ΘΕΩΡΗΜΑ ("ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ")

Έστω $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^n$ J-μετρ. και $f: B \to \mathbb{R}$ ολοκληρ.

$$\Rightarrow \inf f \cdot \underbrace{V(B)}_{=\int_B 1} \leq \int_B f \leq \sup f \cdot \underbrace{V(B)}_{=\int_B 1} \Rightarrow$$

$$\overset{(\beta)}{\Rightarrow} \int_B \inf f \overset{(\gamma)}{\leq} \int_B f \overset{(\gamma)}{\leq} \int_B \sup f$$

Άλλες ιδιότητες Jordan-μετρήσιμων συνόλων και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων:

(1) $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-μετρήσιμα $\Rightarrow$
$\Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ Jordan-μετρήσιμα

(2) A, B Jordan-μετρήσιμα, f ολοκληρώσιμη πάνω στα A και B (με $\int_\emptyset f = 0$) τότε η f ολοκληρώσιμη στα $A \cup B$ και $A \cap B$
Δηλαδή, $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$.

(3) A, B Jordan-μετρήσιμα $\Rightarrow V(A\cup B) = V(A) + V(B) - V(A \cap B)$

Παρατήρηση: Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Το B έχει μηδενικό περιεχόμενο (δηλ. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ κλειστό ορθογώνιο ...)
$\Leftrightarrow$ το B είναι Jordan-μετρήσιμο με $\int_B 1 = V(B) = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^n$ J-μετρήσιμο με $V(B) = \int_B 1 = 0$ και $f: B \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ ολοκληρ. με $\int_B f = 0$.

1) Πρόταση / Άσκηση: Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A, B \neq \emptyset$ J-μετρήσιμα με $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$ τότε $f: A\cup B \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. $\Leftrightarrow$ $f|A$ και $f|B$ ολοκληρ. και $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$

2) Πόρισμα / Άσκηση: Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A, B \neq \emptyset$ J-μετρήσιμα με $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset \Rightarrow V(A\cup B) = V(A) + V(B)$.

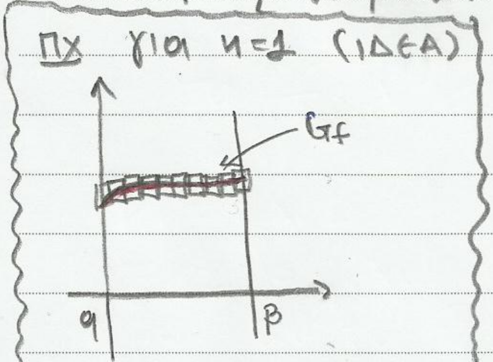
3) Πρόταση / Άσκηση: Έστω $B \neq \emptyset$ $B \subseteq \mathbb{R}^n$, J-μετρήσιμο και $f: B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, $N \subseteq B$ J-μετρήσιμο με $V(N) = 0$ και $g: B \to \mathbb{R}$ φραγμένη με $f = g$ στο $B \setminus N \Rightarrow g$ ολοκληρ. όπου $\int_B g = \int_B f$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό και J-μετρήσιμο και $f: B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$ το G_f έχει (n+1)-διάστατο μηδενικό περιεχόμενο.

γράφημα

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$G_f = \{ (\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in B \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$



Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο με $B \subseteq A \rightsquigarrow$ Η $f_{B|A}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $B/A \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ (κρ. Riem.) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists P \in P(A))$:

$$: U(f_{B|A}, P) - L(U_{B|A}, P) =$$

$$= \sum_{S \in S_P} (\sup f_B|S - \inf f_B|S) \cdot V(S) < \varepsilon$$

Έτσι αφού, $\Gamma f = \{(\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in B\} \subseteq \{(\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in B\} \cup$
$\cup \{(\bar{x}, 0) : \bar{x} \in A \setminus B\} = \{(\bar{x}, f_B(\bar{x})) : \bar{x} \in A\} =$
$= \bigcup_{S \in S_P} \{(\bar{x}, f_B(\bar{x})) : \bar{x} \in S\}$ $\bigcup_{S \in S_P} S \times (\inf f_B|S, \sup f_B|S)$

· Άρα, $\sum_{S \in S_P} V(A) < \varepsilon$

ΘΕΩΡΗΜΑ (SOS)

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^{\nu}$, $B \neq \emptyset$ J-μετρ. και $f_1, f_2 : B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, με $f_1 \leq f_2 \Rightarrow$ το σύνολο
$M = \{(x,y) : x \in B, f_1(x) < y < f_2(x)\}$
είναι J-μετρ. με $V(M) = \int_M 1 = \int_B (f_2 - f_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \int_M 1 \, d(x,y) = \int_B (f_2(x) - f_1(x)) \, dx$.

Άσκηση: (Υπολογιστική)

Να υπολογιστεί το εμβαδό του μοναδιαίου κυκλικού δίσκου $r \leq 1$

Λύση

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1] = B, \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{f_1} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{f_2}\} \Rightarrow$$

$$\overset{\text{Θεώρημα}}{\Rightarrow} V(D) = \int_{[-1,1]} (f_2(x) - f_1(x)) \, dx =$$

$$= \int_{[-1,1]} 2\sqrt{1-x^2} \, dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} \, dx = \cdots$$